Rozšíření MA1 - domácí úkol 3 - řešení:

I. Opakování analytické geometrie:

1. Najděte parametrické vyjádření přímky , která je průnikem dvou rovin, jejichž rovnice jsou $x-3y-z+2=0$ a $2x-8y-3z+6=0$.

Nejprve opakování základních pojmů:
(potřebných k řešení úlohy)

– pracujeme v kartézské soustavě v prostoru, body budeme značit $X[x,y,z]$, vektory $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$;
jsou-li $A[a_1,a_2,a_3]$, $B[b_1,b_2,b_3]$ body prostoru, pak $\vec{AB}$ je vektor, obvykle značený "($\vec{AB}$ =) $B-A$" $=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$.

Parametrické vyjádření přímky v prostoru:

a) je-li přímka p dána (v prostoru) bodem $A[a_1,a_2,a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ $(\neq(0,0,0))$, pak platí: bod X je bodem přímky p právě když vektor $X-A$ je násobkem směrového vektoru $\vec{v}$, tj.

$$X\in p \iff \exists t\in R:\ X-A=t\cdot\vec{v},$$

tedy $\underline{X\in p \iff X=A+t\vec{v},\ t\in R}$

(vektorový tvar parametrického vyjádření přímky),

nebo v souřadnicích:

$$(x,y,z)=(a_1,a_2,a_3)+t(v_1,v_2,v_3),\ t\in R$$

neboli:

$$\begin{aligned} x&=a_1+tv_1\\ y&=a_2+tv_2\\ z&=a_3+tv_3 \end{aligned},\quad t\in R$$

b) je-li přímka p zadána dvěma různými body A,B, $A\neq B$, pak směrový vektor přímky je vektor $\vec{v}=B-A$, (nebo i vektor $A-B$, nebo libovolný nenulový násobek vektoru $B-A$), a pak tedy

$$X \in p \iff X = A + t\,(B-A)\,,\ t \in R\,,$$

v souřadnicích

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t\,(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)\,,\ t \in R\,.$$

c) a navíc, parametricky můžeme vyjádřit i polopřímku s počátkem A, na které leží bod B („omezením" parametru)

$$X = A + t(B-A)\,,\quad t \geqq 0\,,$$

i úsečku $\overline{AB}$

$$X = A + t(B-A)\,,\quad t \in \langle 0, 1\rangle\,.$$

Řešení příkladu:

Hledáme vyjádření přímky p, která je průnikem rovin σ a ρ, kde obecná rovnice roviny σ je : $x - 3y - z + 2 = 0$
a obecná rovnice roviny ρ je : $2x - 8y - 3z + 6 = 0$

(o vyjádření roviny parametrickém i pomocí obecné rovnice je před řešením příkladu 2.)

A odtud: normála k rovině σ : $\vec{n}_\sigma = (1, -3, -1)$
normála k rovině ρ : $\vec{n}_\rho = (2, -8, -3)$,

a vidíme, že $\vec{n}_\rho$ a $\vec{n}_\sigma$ jsou lineárně nezávislé ($\vec{n}_\sigma$ není násobkem $\vec{n}_\rho$), „geometricky" různoběžné, tedy roviny ρ a σ jsou různoběžné a jejich průnikem je přímka, označme ji p.

a) Řešení užitím lineární algebry:

přímka p je tedy množina bodů $X[x,y,z]$, takových, že $X \in \rho$ a zároveň $X \in \sigma$, tj. souřadnice bodu $X \in \rho \cap \sigma$ splňují rovnice ρ i σ, tj. bod $[x,y,z]$ je řešením soustavy rovnic

$$\left.\begin{aligned} x - 3y - z + 2 &= 0 \\ 2x - 8y - 3z + 6 &= 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

a maticově (Gaussova eliminační metoda):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & -8 & -3 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

a tedy „máme" ekvivalentní soustavu k soustavě (*):

$$\begin{aligned} x - 3y - z &= -2 \\ 2y + z &= 2 \end{aligned} \quad ;$$

a zvolíme-li $y = t$, $t \in R$, pak $z = 2 - 2t$ a $x = t$,

tedy: $(x,y,z) = (0,0,2) + t(1,1,-2)$, $t \in R$,

nebo též $(x,y,z) = (t, t, 2-2t)$, $t \in R$,

je parametrické vyjádření hledané přímky p.

b) Řešení „klasicky" užitím analytické geometrie:

pro vyjádření přímky p, která je průnikem rovin ρ a σ, „potřebujeme" bod přímky p a její směrový vektor:

(i) najdeme „nějaký" bod přímky p – vidíme, že pro $x=0, y=0$ řeší soustavu (*) $z=2$, tj. na přímce p leží bod $A\,[0,0,2]$

(ii) a směrový vektor p – $\vec{v}$?
bod X leží na p, právě když je vektor $X-A$ kolmý k vektoru $\vec{n}_\rho$ i k vektoru $\vec{n}_\sigma$ (neboť body X, A leží v $\rho \cap \sigma$, tj. vektor $X-A$ je vektor v ρ, tj. $X-A \perp \vec{n}_\rho$ i $X-A$ leží v rovině σ, tj. $X-A \perp \vec{n}_\sigma$);
lze tedy volit $\vec{v} = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma$ (neboť „víme" z definice vektorového součinu, že jsou-li vektory $\vec{a}, \vec{b}$ lineárně nezávislé vektory z R^3, pak vektorový součin je nenulový vektor, ortogonální k $\vec{a}$ i k $\vec{b}$)

Tedy: $\vec{v} = \vec{n}_\rho \times \vec{n}_\sigma = (2,-8,-3) \times (1,-3,-1) = (-1,-1,2)$
(nebo i $\vec{v} = \vec{n}_\sigma \times \vec{n}_\rho = (1,1,-2)$),
a tedy opět dostáváme:
přímka p má parametrické vyjádření

$$\underline{(x,y,z) = (0,0,2) + t(1,1,-2),\ t \in R}$$

Poznámka: výpočet $\vec{a} \times \vec{b}$ – znám ze středoškolské matematiky, jednoduše lze „užít" následující „návod":

$$\text{"}\quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1, & \vec{e}_2, & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \quad \text{"}$$

(rozvoj dle 1. řádku determinantu)

2. V prostoru jsou dány body $A[2,2,2]$, $B[4,3,3]$ a $C[1,-1,4]$.
   a) Najděte parametrické vyjádření i obecnou rovnici roviny ABC.
   b) Zjistěte, zda bod $D[-1,3,2]$ je bodem roviny ABC.
   c) Vyjádřete parametricky kolmici k rovině ABC, vedenou bodem $D[-1,3,2]$.

Základní „pomůcky" k řešení – opakování – „o rovině"

a) vyjádření roviny parametrické:

(i) je-li rovina ρ dána bodem $A \in \rho$ a dvěma různoběžnými nenulovými vektory $\vec{u} \neq \vec{o}$, $\vec{v} \neq \vec{o}$ (tj. lineárně nezávislými vektory $\vec{u}, \vec{v}$), pak platí:

$X \in \rho \iff X-A$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}, \vec{v}$,
tj. existují čísla $t, s \in R$ taková, že

$$X - A = t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t,s \in R,$$

neboli

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t,s \in R \quad -$$

– parametrické (vektorové) vyjádření roviny ρ,
v souřadnicích pak ($\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$):

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3) + s(v_1, v_2, v_3), \quad t,s \in R,$$

nebo $$(x,y,z) = (a_1 + tu_1 + sv_1;\ a_2 + tu_2 + sv_2;\ a_3 + tu_3 + sv_3), \quad t,s \in R$$

(ii) je-li rovina ρ dána třemi různými body $A[a_1, a_2, a_3]$, $B[b_1, b_2, b_3]$, $C[c_1, c_2, c_3]$, které neleží na jedné přímce, pak vektory (například) $\vec{u} = B-A$, $\vec{v} = C-A$ jsou lineárně nezávislé (různoběžné nenulové) vektory a parametricky pak rovinu ρ vyjádříme:

$$X = A + t(B-A) + s(C-A), \quad s,t \in R$$

(v souřadnicích analogicky k (i)).

b) <u>obecná rovnice roviny:</u>

Obecná rovnice roviny ϱ je (jak je známo „ze školy")

$$\underline{ax + by + cz + d = 0},$$

kde vektor $(a, b, c) = \vec{n}_\varrho$ je normálový vektor roviny ϱ (tj. nenulový vektor, kolmý k rovině ϱ).

<u>Jak se k této rovnici „dojde"?</u>

Máme-li dán normálový vektor $\vec{n}_\varrho \neq \vec{o}$, a bod $A \in \varrho$, pak

$$X \in \varrho \iff X - A \perp \vec{n}_\varrho ,$$

což platí právě když skalární součin vektorů $\vec{n}_\varrho$ a $X - A$ je nulový, tj. $(X - A) \cdot \vec{n}_\varrho = 0$,

a v souřadnicích ($X[x, y, z]$, $\vec{n}_\varrho = (n_1, n_2, n_3)$, $A[a_1, a_2, a_3]$):

$$n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0,$$

tedy $\underline{n_1 x + n_2 y + n_3 z + (-n_1 a_1 - n_2 a_2 - n_3 a_3) = 0},$

tj. $(a, b, c) = (n_1, n_2, n_3)$, $d = -(n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3)$

<u>A nyní:</u>

(i) je-li rovina ϱ je dána bodem $A[a_1, a_2, a_3]$ a dvěma lineárně nezávislými vektory $\vec{u}, \vec{v}$ v rovině, pak normálový vektor

$$\vec{n}_\varrho = \vec{u} \times \vec{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, -(u_1 v_3 - u_3 v_1), u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

(ii) je-li dána rovina ϱ je dána třemi různými body $A, B, C \in \varrho$, které neleží na jedné přímce, pak lze volit (např.)

$$\vec{n}_\varrho = (B - A) \times (C - A)$$

(iii) „asi" nejjednodušší cesta k obecné rovnici roviny je užitím lineární algebry a determinantu:
je-li rovina ρ dána bodem $A[a_1, a_2, a_3]$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ($\vec{u}, \vec{v}$ LNZ vektory), pak (už bylo užito při parametrickém vyjádření roviny):
$X \in \rho \Leftrightarrow X - A, \vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně nezávislé vektory ($X - A$ je kombinace $\vec{u}, \vec{v}$) $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} X - A \\ \vec{u} \\ \vec{v} \end{vmatrix} = 0, \text{ tj. } \begin{vmatrix} x - a_1, & y - a_2, & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0;$$

a speciálně, jsou-li dány tři body A, B, C (viz (ii)), pak rovnice roviny ρ je (např.)

$$\begin{vmatrix} x - a_1, & y - a_2, & z - a_3 \\ b_1 - a_1, & b_2 - a_2, & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1, & c_2 - a_2, & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

<u>Řešení příkladu:</u>

a) rovina ρ je dána třemi body
$A[2,2,2]$, $B[4,3,3]$, $C[1,-1,4]$ – pak volíme (např.)
$\vec{u} = B - A = (2,1,1)$, $\vec{v} = C - A = (-1,-3,2)$;

(i) je „vidět", že vektory $B-A$ a $C-A$ jsou nerovnoběžné, a tedy <u>rovinu ρ můžeme vyjádřit parametricky</u>

$$X = A + t(B-A) + s(C-A), \quad t, s \in R,$$

tj. $(x,y,z) = (2,2,2) + t(2,1,1) + s(-1,-3,2),\ t,s \in \mathbb{R}$,

nebo $\begin{cases} x = 2 + 2t - s \\ y = 2 + t - 3s \\ z = 2 + t + 2s \end{cases},\ t,s \in \mathbb{R}$

($\vec{v}$ a $\vec{u}$ lze volit i „jinak", třeba $\vec{u} = A - B$, $\vec{v} = C - B$, pak lze vyjádřit ρ: $X = B + t(A-B) + s(C-B)$, $t,s \in \mathbb{R}$ a podobně)

(ii) <u>obecná rovnice roviny ρ</u> :

určíme $\vec{n}_\rho = \vec{u} \times \vec{v} = (5,-5,-5) = 5(1,-1,-1)$

(výpočet $\vec{u} \times \vec{v}$: $\times \begin{matrix}(2,1,1)\\(-1,-3,2)\end{matrix} = \big(1\cdot 2-(-3\cdot 1), -(2\cdot 2-(-1)\cdot 1), 2(-3)-(-1\cdot 1)\big)$)

(stačí vzít za normálový vektor $\vec{n}_\rho = (1,-1,-1)$)

Obecná rovnice je pak $x - y - z + d = 0$,

a „d" získáme dosazením jednoho bodu z roviny ρ, např. A, pak $d = -2 + 2 + 2 = 2$, tj.

<u>obecná rovnice roviny ρ je : $x - y - z + 2 = 0$</u>

(iii) „<u>rychlonalezení" rovnice roviny (užitím determinantu)</u> :

$$\begin{vmatrix} x-2, & y-2, & z-2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tj. } (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

tedy <u>$5(x-2) - 5(y-2) - 5(z-2) = 0$ (cbd)</u>

<u>Poznámka</u> : vektor $\left(\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ -3, & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ -1, & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \right) = (B-A) \times (C-A)$!

b) bod D [−1, 3, 2] je bodem roviny $\Leftrightarrow$ [−1, 3, 2] splňuje rovnici roviny ρ,

tj: $x - y - z + 2 = 0$

ale

pro bod D: $-1 - 3 - 2 + 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow D \notin \rho$

c) parametrické vyjádření kolmice p k rovině ρ tak, že $D \in p$:

(D [−1, 3, 2]):

je-li $p \perp \rho$, pak směrový vektor přímky p je $\vec{n}_\rho = (1, -1, 1)$,

pak kolmice k ρ, přímka p, má vyjádření:

$$(x, y, z) = (-1, 3, 2) + t(1, -1, -1), \quad t \in R$$

d) navíc třeba (není v zadání DÚ 3) – nalezení průsečíku kolmice p a roviny ρ:

$P \in \rho \wedge P \in p$, tj. „musí" platit pro P:

$x - y - z + 2 = 0$ a $(x, y, z) = (-1, 3, 2) + t(1, -1, -1)$

(pro „nějaké" t)

tj. $(-1 + t) - (3 - t) - (2 - t) + 2 = 0$

$3t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3}$,

a tedy $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

(udělejte si zkoušku)

3. Napište obecnou rovnici přímky q, která prochází středem kružnice k o rovnici $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ a je kolmá na přímku p o rovnici $2x-3y+4=0$.

Opakování základních pojmů:

(i) parametrické vyjádření přímky v rovině (analogicky jako v minulém příkladu v prostoru):

je-li přímka p dána dvěma body $A[a_1,a_2]$ a $B[b_1,b_2]$, $A \neq B$, pak $(X[x,y])$ – $B-A$ je směrový vektor p –

$$X \in p \iff X-A = t(B-A) \iff X = A + t(B-A),\ t \in \mathbb{R}$$

(ii) obecná rovnice přímky p:

$$ax+by+c=0,$$

kde vektor $(a,b) = \vec{n}_p$ je kolmý k přímce p

(odvození analogicky k opakování u příkladu 2 –

$X \in p \iff X-A \perp \vec{n}_p \iff n_1(x-a_1)+n_2(y-a_2)=0$,

tj. $n_1x+n_2y+(-n_1a_1-n_2a_2)=0$, tj.

$(a,b)=(n_1,n_2)$ a $c=-n_1a_1-n_2a_2$)

(iii) rovnice kružnice v rovině:

kružnice K o středu $S[s_1,s_2]$ a poloměru $R>0$ je množina bodů $X[x,y]$, které mají od středu S vzdálenost R, tj.

$K = \{ X[x,y];\ d_2(X,S)=R \}$ ($d_2(A,B)$ je označení vzdálenosti bodů A,B v rovině)

$= \{ [x,y];\ \sqrt{(x-s_1)^2+(y-s_2)^2} = R \}$

a odtud je rovnice kružnice K (známá „ze školy")

$$(x-s_1)^2+(y-s_2)^2 = R^2$$

Speciálně, je-li K kružnice o středu v počátku, tj: S[0,0] a poloměru R>0, pak rovnice kružnice K je

$$\underline{x^2+y^2=R^2} .$$

<u>Řešení příkladu:</u>

Má-li zadaná kružnice rovnici $x^2+y^2-2x+4y+1=0$, pak tuto rovnici upravíme „doplněním" na čtverec (dvakrát) na rovnici

$$(x-1)^2+(y+2)^2-1-4+1=0, \quad \text{tj.}$$

$$\underline{(x-1)^2+(y+2)^2=4} ;$$

tedy, vidíme, že <u>k</u> má střed v bodě S[1,-2] a poloměr R=2;

Máme-li najít obecnou rovnici přímky q, přičemž S∈q, a p⊥q, kde přímka p má rovnici $2x-3y+4=0$, pak snadno najdeme $\vec{n}_q=(3,2)$ (neboť $\vec{n}_p=(2,-3)$ a $\vec{n}_p\cdot\vec{n}_q=0$, což platí: $(2,-3)\cdot(3,2)=6-6=0$)

Tedy q má rovnici $3x+2y+c=0$ (*),

a protože S∈q, musí „souřadnice bodu S[1,-2] splňovat rovnici (*)", tedy dostáváme $c=-3\cdot 1-2(-2)=1$,

tj: hledaná přímka q má obecnou rovnici

$$\underline{3x+2y+1=0} .$$

II. Vektorové funkce jedné proměnné:

Nejprve obecně:

Vektorová funkce jedné reálné proměnné je zobrazení $\vec{f}$ z množiny $M \subset R$ obecně do R^n, $n>1$, $n \in N$ (pro nás je zvláště užitečné zobrazení $\vec{f}$ pro $n=2,3$) tj.

$$\vec{f} : M \subset R \longrightarrow R^n \text{ (spec. } R^2\text{, resp. } R^3\text{)},$$

„rozepsáno"

$$\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)), \quad t \in M,$$

kde funkce $f_i(t)$, $i=1,2,\dots n$ jsou reálné funkce proměnné $t \in M \subset R$.

pro $n=2$: $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t))$, $t \in M$

$n=3$: $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$, $t \in M$;

Základní vlastnosti vektorové funkce $\vec{f} : M \subset R \to R^n$,

(tj. $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$, $t \in M$)

(vše podrobněji včetně řady příkladů, a snad i „srozumitelně", v přednášce pro MA2 z 18.3.2020)

1) definiční obor: $\mathcal{D}\vec{f} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{D}f_i$;

2) limita $\vec{f}$:

$$\lim_{t \to t_0(\pm)} \vec{f}(t) = \vec{L} \; (= (L_1, L_2, \dots, L_n),\; L_i \in R) \iff$$

$$\text{existují } \lim_{t \to t_0(\pm)} f_i(t) = L_i, \quad i=1,2,\dots n$$

„Říká se": „limita vektoru je vektor limit".

3) spojitost $\vec{f}(t)$ v bodě t_0 $(\pm)$: - přesně z 2) -

- $\vec{f}(t)$ je spojitá v bodě t_0 $(\pm)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to t_0(\pm)} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to t_0(\pm)} f_i(t) = f_i(t_0)$, $i=1,2,\dots n$ $\Leftrightarrow$ f_i je spojitá fce v bodě t_0 $(\pm)$, $i=1,2\dots n$

4) derivace $\vec{f}(t)$ v bodě t_0:

definuje se „stejně" jako u reálných funkcí, tj.

$$\vec{f}\,'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{\vec{f}(t)-\vec{f}(t_0)}{t-t_0}$$

$$\left(= \lim_{t\to t_0} \left(\frac{f_1(t)-f_1(t_0)}{t-t_0}, \dots, \frac{f_n(t)-f_n(t_0)}{t-t_0} \right)\right),$$

a tedy (opět z 2)) dostaneme:

$\vec{f}\,'(t_0)$ existuje (vlastní) $\Leftrightarrow$ $f_i'(t_0)\in R$, $i=1,2\dots n$,

tj. opět

„derivace vektoru je vektor derivací"

A navíc dvě poznámky:

1.) Máme-li danou vektorovou funkci $\vec{f}: \langle a,b\rangle \to R^3(R^2)$, která je spojitá, a ještě lépe, má všude derivaci $\vec{f}\,'$ v $\langle a,b\rangle$ (nebo ex. $\vec{f}\,'(t)$ až na konečně mnoho bodů v $\langle a,b\rangle$), pak množinu bodů

$$C = \{ X \in R^3(R^2) \; ; \; X = \vec{f}(t), \; t \in \langle a,b \rangle \}$$

si můžeme představit jako prostorovou (rovinnou) křivku – definici křivky probereme přesněji a podrobněji v „kapitole" o křivkovém integrálu.

Nebo – fyzikálně – vektorová funkce $\vec{f}(t)$ je nástrojem k popisu trajektorie (dráhy) hmotného bodu v prostoru (resp. v rovině) – poloha bodu X je dána funkcí

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad , \; t \in \langle a,b \rangle$$

(často se poloha bodu X udává v čase t pomocí polohového vektoru

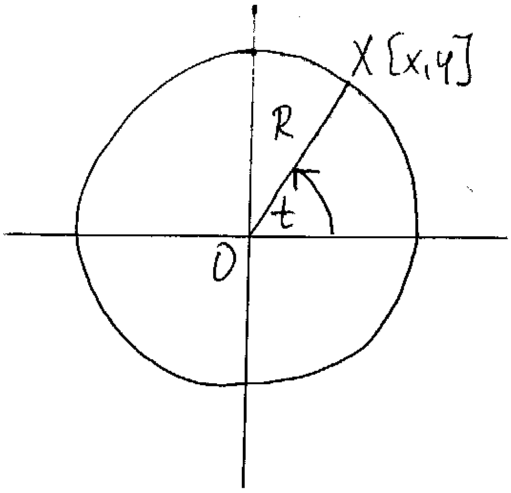
$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \; t \in \langle a,b \rangle$$

2.) Má-li vektorová funkce $\vec{f} : \langle a,b \rangle \to R^3(R^2)$, pak, ex-li $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{o}$, je vektor $\vec{f}'(t_0)$ tečný ke křivce, která je dána funkcí $\vec{f}$ (nebo k dráze pohybu, popsané $\vec{f}$), v bodě $X(t_0) = \vec{f}(t_0)$, fyzikálně: Je-li dráha pohybu dána funkcí $\vec{r}(t)$, $t \in \langle a,b \rangle$, pak $\vec{r}'(t_0) = \vec{v}(t_0)$ – tj. vektor rychlosti pohybu v čase t_0, a vektor $\vec{v}(t)$ má směr tečný ke dráze v bodě $\vec{r}(t_0)$.

1. Najděte parametrizaci křivky a napište parametrické rovnice tečny k této křivce v některém jejím bodě, když křivka je
   a) dvakrát „oběhnutá“ a kladně orientovaná kružnice o středu $S=[2,3]$ a poloměru $R=2$; zkuste i parametrizovat stejnou kružnici, ale orientovanou záporně;
   b) oblouk paraboly $y=x^2$ s počátečním bodem (0, 0) a koncovým bodem (1,1).

a) nejprve „pomůcka“ – parametrizace kružnice, tj. vyjádření kružnice v rovině jako „obrazu“ vektorové fce (opět podrobně v přednášce MA2 z 18. 3. 2020)

(i) kružnice K o středu v počátku a poloměru $R>0$:



zvolíme-li t jako orientovaný úhel mezi průvodičem bodu X (tj. $\overline{OX}$) a kladnou poloosou x, pak

$x = R\cos t$ a $y = R\sin t$,

a „celou“ kružnici dostaneme pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$

(„zkouška“: $x^2+y^2 = R^2(\cos^2 t+\sin^2 t) = R^2$)

Navíc, parametrizací můžeme vyjádřit i kružnici vícekrát oběhnutou (volbou intervalu pro t), nebo jen „část“ K, a parametrizací může být určen i směr „obíhání“ kružnice – při „naší“ parametrizaci je kružnice kladně orientovaná (obráceně – záporně orientovaná)

Tedy, parametrizace kružnice K je: $(X \in K)$

$$X = \vec{r}(t) = (R\cos t,\ R\sin t),\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

(jednou „oběhnutá“);

je-li např. $t \in \langle 0, 6\pi\rangle$, kružnici jsme „oběhli“ třikrát.

(ii) <u>parametrizace kružnice K o středu $S[s_1, s_2]$ a poloměru R</u> :

teď už rychleji: analogií k (i) máme

$$x - s_1 = R\cos t$$
$$y - s_2 = R\sin t \quad , \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

(nebo i jiný interval dle potřeby)

tj. $\underline{\vec{r}(t) = (s_1 + R\cos t,\ s_2 + R\sin t)}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ (apod.)

<u>Tedy, řešení příkladu:</u>

Je-li K kružnice o středu $S[2,3]$, poloměru $R = 2$, a oběhnutá dvakrát, pak parametrizace K je:

$$K = \{ X[x,y] ;\ X = \vec{r}(t) = (2 + 2\cos t,\ 3 + 2\sin t),\ t \in \langle 0, 4\pi\rangle \}$$

<u>(a poznámka</u> :

$\vec{r}\,'(t) = (-2\sin t ; 2\cos t)$, a vidíme, že

$\vec{r}\,'(t) \perp (X(t) - S)$ (tedy $\vec{r}\,'(t)$ je tečný ke kružnici K)

(neboť $\vec{r}\,'(t) \cdot (X(t) - S) = (-2\sin t, 2\cos t)(2\cos t, \sin t) = 0$)

A kružnice K oběhnutá dvakrát v opačném směru:

místo „úhlu" (tj. parametru) t vezmeme úhel $-t$, $t \in \langle 0, 4\pi\rangle$,

tj. $\vec{r}(t) = (2 + 2\cos(-t),\ 2 + 2\sin(-t))$, tj.

$$\vec{r}(t) = (2 + 2\cos t,\ 2 - \sin t) \quad , \quad t \in \langle 0, 4\pi\rangle$$

2. Napište parametrické rovnice tečny ke křivce v daném bodě T, je-li parametrizace křivky
   a) $\vec{r}(t)=(t\cos t, t\sin t)$, $t\in\langle 0,\infty)$ a $T=[0,\frac{1}{2}\pi]$;
   b) $\vec{r}(t)=(1, \cos t, \sin t)$, $t\in\langle 0,2\pi\rangle$ a $T=[1,0,1]$;
   c) $\vec{r}(t)=(2\cos t, 2\sin t, 3t)$, $t\in\langle 0,4\pi\rangle$ a $T=[-2,0,3\pi]$

   A zkuste si křivku v příkladech i „představit“.

„Návod“:

„Mějme křivku K parametrizací

$$K=\{X\in R^2(R^3)\ ;\ X=\vec{r}(t),\ t\in\langle a,b\rangle\},$$

kde $\vec{r}(t)$ je vektorová funkce, $\vec{r}:\langle a,b\rangle\to R^2(R^3)$,

pak tečný vektor ke křivce K v bodě $X(t_0)$, $t_0\in(a,b)$,

je $\vec{r}\,'(t_0)$ (tedy, je-li $\vec{r}(t)=(r_1(t),r_2(t),r_3(t))$, pak

$\vec{r}\,'(t_0)=(r_1'(t),r_2'(t),r_3'(t))$, je-li

$\vec{r}(t)=(r_1(t),r_2(t))$, pak $\vec{r}\,'(t)=(r_1'(t),r_2'(t))$, $t\in(a,b)$)

a parametrizace tečny ke křivce K v bodě $T=\vec{r}(t_0)$ je:

$$\underline{X=\vec{r}(t_0)+s\,\vec{r}\,'(t_0)\ ,\ s\in R},$$

tedy $\underline{(x,y,z)=(r_1(t_0)+s r_1'(t_0),\ r_2(t_0)+s r_2'(t_0),\ r_3(t_0)+s r_3'(t_0)),\ s\in R}$.

Řešení příkladů:

a) $\underline{\vec{r}(t)=(t\cos t, t\sin t)\ ,\ t\in\langle 0,+\infty)\ ,\ T=[0,\frac{1}{2}\pi]}$:

(i) bodu $T[0,\frac{1}{2}\pi]$ odpovídá parametr $t_0=\frac{\pi}{2}$;

(ii) $\vec{r}\,'(t)=(\cos t-t\sin t,\ \sin t+t\cos t)$, $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{2})=(-\frac{\pi}{2},1)$,

tedy tečna ke křivce v bodě T má parametrické vyjádření:

$$(x,y)=(0,\tfrac{\pi}{2})+t(-\tfrac{\pi}{2},1),\ t\in R;\ tj.$$

$$\underline{(x,y)=(-\tfrac{\pi}{2}t,\ \tfrac{\pi}{2}+t)\ ,\ t\in R}.$$

a danou křivku si můžeme představit jako dráhu bodu, který „startuje" v počátku, obíhá počátek, ale vzdaluje se od počátku úměrně „opsanému úhlu" – spirála

b) $\vec{r}(t) = (1, \cos t, \sin t)$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $T = [1, 0, 1]$:

zde: $\vec{r}\,'(t) = (0, -\sin t, \cos t)$,

bodu T odpovídá hodnota parametru $t_0 = \frac{\pi}{2}$,

pak $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{r}\,'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, -1, 0)$

a tečna v bodě T je:

$(x, y, z) = (1, 0, 1) + s\,(0, -1, 0)$, $s \in R$, tj.

$\underline{(x, y, z) = (1, -s, 1), \; s \in R}$

a daná křivka je kružnice o poloměru 1, ležící v rovině $x = 1$, a mající střed $S\,[1, 0, 0]$ (tj. S je na ose x)

c) $\vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t)$, $t \in \langle 0, 4\pi \rangle$, $T = [-2, 0, 3\pi]$:

zde: $\vec{r}\,'(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 3)$, $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{r}\,'(\pi) = (0, -2, 3)$,

bodu T odpovídá parametr $t_0 = \pi$

a tedy tečna v bodě T: $X = T + s\,\vec{r}\,'(t_0)$, tj.

$(x, y, z) = (-2, 0, 3\pi) + s\,(0, -2, 3)$, $s \in R$,

neboli $\underline{(x, y, z) = (-2, -2s, 3\pi + 3s), \; s \in R}$

a daná křivka je „šroubovice" – průmět křivky do roviny $z = 0$ je kružnice o středu v počátku, tj. množina bodů $(2\cos t, 2\sin t, 0)$, a poloměru $R = 2$, přičemž z-ová souřadnice bodu X roste úměrně úhlu otáčení – a zde máme dva „závity" šroubovice ($t \in \langle 0, 4\pi \rangle$).